数理解析研究所講究録
第 892 巻 1995 年 51-66

速く回転する球内の臨界熱対流

京大数理研 木田 重雄 (Shigeo Kida)
京大数理研 北内 英章 (Hideaki Kitauchi)

1. はじめに

回転する球の内部における熱対流の運動は、地磁気ダイナモの問題に関連して、これまでに多くの研究がある（文献1、2参照）。一様に分布する熱源と球の中心からの距離に比例する自己重力によって引き起こされる定常な流れの線形安定性については、自転速度が速い極限の場合に Robert （文献3）と Busse （文献4）によって調べられた。彼らは、撹乱が自転軸を軸とするある半径の円柱近傍に局在していると仮定して解析を行ない、撹乱が赤道面に関して反対称（Robert）および対称（Busse）の場合の臨界 Rayleigh 数を求めた。このうち、対称の場合の臨界 Rayleigh 数がより低い値を与える。

ところが、彼らが求めた臨界撹乱（Bessel 関数で表される）は径方向に局在せず、撹乱の局所性の仮定に矛盾してしまうことがわかった。それ以来、この非局所性の困難が多くの研究者によって考察された（例えば文献5参照）。最近、矢野（文献6）は、球面の赤道面に対する傾きが小さいという簡単化の仮定のもとで局在解を構成した。しかし、実際に撹乱が励起される位置での球面境界の傾きは小さくないので、この簡単化は必ずしも正当ではない。このため、厳密解からの有限の大きさのずれを引き起こす結果を導く可能性がある。実際、§4.1 と §5 で述べるように、臨界撹乱の構造が径方向からずれるのはこのずれの例である。

本稿では、球の回転が速い極限において上記の問題の線形安定性を考察する。次章では、問題の定式化を行なう。§3 では、撹乱が径方向に局在していると仮定して、撹乱についての線形の偏微分方程式系を導く。我々の解析は、Robert （文献3）と Busse （文献4）の解析と次の点で異なっている。彼らは、径方向を向いた撹乱に限定しており、撹乱の位相は半径方向に変化しない。一方、本解析では、撹乱の位相が径方向に変化する傾斜撹乱が含まれている。このおかげで、彼らの限定された撹乱についての解析では得られなかった局在解を構成することが可能になる。しかし、§4 で証明されるように、一様に分布した熱源と球の中心からの距離に比例する自己重力によって駆動される熱対流に対して臨界 Rayleigh 数を与えるのは径方向に向いた極限での撹乱である。従って、臨界 Rayleigh 数は Robert （文献

3）と Busse（文献 4）によって得られたものに一致する。しかしながら、径方向に向いた撹乱は局在しないので、この臨界 Rayleigh 数は極限値としてのみ意味がある。この臨界値よりほんの少し大きい Rayleigh 数に対しては、局在撹乱が存在し、それは径方向から少し傾むく。最後に、これまでになされた研究との関連について §5 で議論する。

2. 基礎方程式

一定角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転している半径 a の球の中の粘性流体の熱対流を考える。運動は球対称に分布した内部熱源 $Q(r)$ によって駆動されるとする。流体の速度 $\boldsymbol{u}$ と温度 T の時間発展を記述する方程式は、Bussinesq 近似のもとで、球とともに回転する座標系で、

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \alpha\gamma T\,\boldsymbol{r} + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega}, \tag{2.1a}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla\cdot(\boldsymbol{u}T) + \kappa\nabla^2 T + Q, \tag{2.1b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{2.1c}$$

となる。ここに、ρ は一様で一定な流体の密度、p は遠心力と重力を込めた実効圧力、$\boldsymbol{r}$ は動径ベクトル $(r = |\boldsymbol{r}|)$、α は体積膨張率、γ は重力場 $\boldsymbol{g}(r) = -\rho\gamma\boldsymbol{r}$ の係数、ν は動粘性係数、κ は熱拡散率、∇ は勾配演算子、∇^2 はラプラシアンである。速度の境界条件としては粘着条件

$$\boldsymbol{u} = 0 \qquad (r = a \text{ で}) \tag{2.2}$$

を採用する。

もし、温度が境界で一様かつ一定であれば、定常な熱伝導状態

$$\boldsymbol{u}_0 = 0, \tag{2.3a}$$

$$T_0(r) = c_1 - \frac{1}{\kappa}\int_0^r \frac{\mathrm{d}r_1}{{r_1}^2}\int_0^{r_1} {r_2}^2 Q(r_2)\mathrm{d}r_2, \tag{2.3b}$$

$$p_0(r) = \alpha\gamma\rho\int_0^r T_0(r_1)r_1\mathrm{d}r_1 + c_2 \tag{2.3c}$$

が存在する。ここに、c_1 と c_2 は定数である。このとき、温度の境界での値は $T_0(a)$ である。以下の解析では、この値を一定のまま止めておく。

さて、定常状態 (2.3) の線形安定性を考えよう。定常状態からの微小撹乱をプライムを付けて表し、

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}', \tag{2.4a}$$

$$T = T_0 + T', \tag{2.4b}$$

$$p = p_0 + p' \tag{2.4c}$$

と書く。式 (2.4) を式 (2.1) に代入し、微小撹乱について線形化すると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \alpha\gamma T\ \boldsymbol{r} + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega}, \tag{2.5a}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \beta F\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} + \kappa\nabla^2 T, \tag{2.5b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{2.5c}$$

および、境界条件

$$\boldsymbol{u} = 0,\ T = 0 \qquad (r = a\ \text{で}) \tag{2.6}$$

が得られる（ただし、プライムを省略した）。ここに、

$$\beta = -\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}r}\right)_{r=a}, \tag{2.7}$$

$$F(r) = -\frac{1}{\beta r}\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}r} \tag{2.8}$$

で、$F(a) = 1$ が成り立つ。特に、一様に分布した熱源 $Q(r) =$ 一定 ($= Q_0$ とおく) の場合には、$\beta = Q_0/3\kappa$ で、

$$F(r) \equiv 1 \tag{2.9}$$

が成り立つ。

次に、撹乱方程式 (2.5) を無次元化するために、長さを a で、時間を a^2/κ で、温度を βa^2 で測り、無次元量（* 印で表す）を

$$\boldsymbol{u} = \frac{\kappa}{a}\boldsymbol{u}^*, \qquad t = \frac{a^2}{\kappa}t^*, \qquad \boldsymbol{r} = a\boldsymbol{r}^*, \qquad T = \beta a^2 T^*, \qquad p = \frac{\rho\kappa^2}{a^2}p^* \tag{2.10}$$

のように導入する。このとき、撹乱方程式 (2.5) は（* 印を省略すると）、

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{u} = \frac{1}{Pr}\nabla p - Ra\ T\ \boldsymbol{r} - (Ta)^{1/2}\boldsymbol{u}\times\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{2.11a}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)T = -F\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}, \tag{2.11b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{2.11c}$$

となる。境界条件は、

$$\boldsymbol{u} = 0, \ T = 0 \qquad (r = 1 \text{ で}) \tag{2.12}$$

である。ここに、$Ra = \alpha\gamma\beta a^6/\kappa\nu$ は Rayleigh 数、$Ta = (2\Omega a^2/\nu)^2$ は Taylor 数、$Pr = \nu/\kappa$ は Prandtl 数、また $\hat{z}$ は回転軸（z 座標）方向の単位ベクトルである。

Taylor 数が大きい場合には、Taylor-Proudman の定理により、撹乱の z 依存性は s および ϕ 依存性に比べて弱いので、流体運動を円柱座標系 (s, ϕ, z) で記述するのが漸近解析に便利である。このとき、境界の球は $s^2 + z^2 = a^2$ と表される。

速度場はソレノイダルであるから、2つのスカラー関数を用いて

$$\boldsymbol{u} = \nabla \times (\Psi \hat{\boldsymbol{z}}) + \nabla \times \nabla \times (\Phi \hat{\boldsymbol{z}}) \tag{2.13}$$

と表される。速度の各成分を具体的に書くと、

$$u_s = \frac{1}{s}\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial z}, \tag{2.14a}$$

$$u_\phi = -\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{1}{s}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi \partial z}, \tag{2.14b}$$

$$u_z = -\nabla_\perp^2 \Phi \tag{2.14c}$$

となる。ここに、

$$\nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{2.15}$$

は回転軸に垂直な平面におけるラプラシアンである。

式 (2.11a) の *curl* および *curl curl* と 単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{z}}$の内積をとると、2つのスカラー関数 Ψ と Φ に関する発展方程式が得られて、

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla_\perp^2 \Psi + (Ta)^{1/2}\frac{\partial}{\partial z}\nabla_\perp^2 \Phi + Ra\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0, \tag{2.16a}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2\nabla_\perp^2 \Phi - (Ta)^{1/2}\frac{\partial}{\partial z}\nabla_\perp^2 \Psi - Ra\left(z\nabla_\perp^2 - s\frac{\partial^2}{\partial s \partial z} - 2\frac{\partial}{\partial z}\right)T = 0, \tag{2.16b}$$

となる。また、式 (2.11b) から、温度 T の発展方程式は

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)T + F\left(s\frac{\partial^2}{\partial s \partial z} - z\nabla_\perp^2\right)\Phi + F\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = 0 \tag{2.16c}$$

となる。境界条件は

$$\frac{1}{s}\frac{\partial \Psi}{\partial \phi}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial z}=0,\ -\frac{\partial \Psi}{\partial s}+\frac{1}{s}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi \partial z}=0,\ -\nabla_\perp^2 \Phi=0,\ T=0 \quad (r=1\text{ で}) \tag{2.17}$$

と書ける。

線形方程式系 (2.16) と (2.17) は z に関して対称であるので、対称攪乱

$$\begin{cases} \Psi(s,\phi,z,t)=\Psi(s,\phi,-z,t), \\ \Phi(s,\phi,z,t)=-\Phi(s,\phi,-z,t), \\ T(s,\phi,z,t)=T(s,\phi,-z,t) \end{cases} \tag{2.18}$$

と反対称攪乱

$$\begin{cases} \Psi(s,\phi,z,t)=-\Psi(s,\phi,-z,t), \\ \Phi(s,\phi,z,t)=\Phi(s,\phi,-z,t), \\ T(s,\phi,z,t)=-T(s,\phi,-z,t) \end{cases} \tag{2.19}$$

を別々に取り扱うことができる。対称攪乱（反対称攪乱）では、速度の r 成分と ϕ 成分および温度は z の偶関数（奇関数）で、速度の z 成分は z の奇関数（偶関数）である。

3. 局在解の構成

ここでは、微分方程式 (2.16) と (2.17) によって記述される攪乱の安定特性と臨界安定状態の空間構造を Taylor 数が大きい場合について調べる。まず、微小パラメター

$$\epsilon=(Ta)^{-\frac{1}{6}} \tag{3.1}$$

を導入する。

3.1 オーダー評価

微分方程式 (2.16) と (2.17) の解が 大きな Taylor 数の極限においてどのような空間構造に漸近するかは必ずしも自明ではない。Roberts （文献 3 ）と Busse （文献 4 ）によって求められた解は、径 (s) 方向と周 (ϕ) 方向には激しく変化するが、軸 (z) 方向にはゆっくり変化し、ある半径 ($s=s_{\mathrm{p}}$, とする) の円柱近傍に局在していた。ここでは、彼らの解析のように解の変動のスケールを天下り的に仮定はしないで、それを系統的に導くことにする。

まず、径方向、周方向、軸方向における解の変化のスケールをそれぞれ ϵ^a、ϵ^b、ϵ^c とおく。ただし、$a, b, c \geq 0$ とする。これは、微分演算子 $\partial/\partial s$、$\partial/\partial\phi$、$\partial/\partial z$ を Ψ、Φ および T に作用させた時

$$\frac{\partial}{\partial s} = O(\epsilon^{-a}), \qquad \frac{\partial}{\partial \phi} = O(\epsilon^{-b}), \qquad \frac{\partial}{\partial z} = O(\epsilon^{-c}) \tag{3.2}$$

であることを意味する。いまの系は線形であるので、撹乱の振幅は一般性を失うことなしに任意に取れる。そこで、$\Psi = O(1)$ とおき、従属変数の大きさを

$$\Psi = O(\epsilon^0), \qquad \Phi = O(\epsilon^d), \qquad T = O(\epsilon^e), \qquad Ra = O(\epsilon^{-f}) \tag{3.3}$$

と仮定する。ただし、d、e、f は実数である。このとき、演算子 ${\nabla_\perp}^2$ と ∇^2 の大きさはそれぞれ

$${\nabla_\perp}^2 = O(\epsilon^{-2\max(a,b)}), \qquad \nabla^2 = O(\epsilon^{-2\max(a,b,c)}) \tag{3.4}$$

となる。さて、方程式 (2.16) の 9 つの項の全てが同程度の大きさであることを要求すると、臨界撹乱に対するスケール指数 a–f を一意的に決定することができて、

$$a = b = d = e = 1, \qquad c = 0, \qquad f = 4 \tag{3.5}$$

となる（付録参照）。時間微分項も関係するとすると、

$$\frac{\partial}{\partial t} = O\left(\epsilon^{-2}\right) \tag{3.6}$$

である。

以上のオーダー評価を考慮して、撹乱を

$$\Psi = \check{\Psi}(s, z) \exp[\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}m\phi], \tag{3.7a}$$

$$\Phi = \epsilon\, \check{\Phi}(s, z) \exp[\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}m\phi], \tag{3.7b}$$

$$T = \epsilon\, \check{T}(s, z) \exp[\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}m\phi] \tag{3.7c}$$

の形におき、

$$\frac{\partial \check{\Psi}}{\partial s}, \ \frac{\partial \check{\Phi}}{\partial s}, \ \frac{\partial \check{T}}{\partial s} = O\left(\epsilon^{-1}\right), \tag{3.8a}$$

$$\omega = \epsilon^{-2}\omega^*, \tag{3.8b}$$

$$m = \epsilon^{-1} m^*, \tag{3.8c}$$

$$Ra = \epsilon^{-4} Ra^* \tag{3.8d}$$

と仮定する。ここで、ω^*、m^*、Ra^* は $O(1)$ の量とする。このとき、

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \epsilon^{-1} \mathrm{i} m^*, \quad \nabla^2 = \nabla_\perp^2 (1 + O(\epsilon)) = \epsilon^{-2} \left(\mathcal{D} + O(\epsilon) \right) \tag{3.9}$$

となる。ただし、

$$\mathcal{D} = \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{m^{*2}}{s^2} \tag{3.10}$$

である。

式 (3.7)–(3.10) を微分方程式 (2.16) に代入し、ϵ に関して最低次の項をとると、

$$\left(\mathcal{D} - \frac{\mathrm{i}\omega^*}{Pr} \right) \mathcal{D} \check{\Psi} + \mathcal{D} \frac{\partial \check{\Phi}}{\partial z} + \mathrm{i} m^* Ra^* \check{T} = 0, \tag{3.11a}$$

$$\left(\mathcal{D} - \frac{\mathrm{i}\omega^*}{Pr} \right) \mathcal{D} \check{\Phi} - \frac{\partial \check{\Psi}}{\partial z} - Ra^* z \check{T} = 0, \tag{3.11b}$$

$$\left(\mathcal{D} - \mathrm{i}\omega^* \right) \check{T} - F z \mathcal{D} \check{\Phi} + \mathrm{i} m^* F \check{\Psi} = 0 \tag{3.11c}$$

が得られる。ただし、ここでは局在解を考えているから、式 (3.11b) の全体に作用していた演算子 $\mathcal{D}$ は省略されている。このため、微分方程式系の階数が下がるので、粘着の境界条件 (2.17) の全てを満たすことができない。ここでは、不通過の境界条件、すなわち球面に垂直な速度成分がゼロであるという条件

$$s u_s + z u_z = \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + s \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial z} - z \nabla_\perp^2 \Phi = 0 \qquad (s^2 + z^2 = 1 \text{ で}) \tag{3.12}$$

のみを課す。パラメター ϵ の最低次では、この境界条件は

$$\mathrm{i} m^* \check{\Psi} - \mathcal{D} z \check{\Phi} = 0 \qquad (s^2 + z^2 = 1 \text{ で}) \tag{3.13}$$

となる。一方、温度 $\check{T}$ の境界条件は式 (3.11c) によって自動的に満たされている。

3.2 局在解

微分方程式系 (3.11) と (3.13) の解を

$$\check{\Psi}(s, z) = \overline{\Psi}(z|s_\mathrm{p}) \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\epsilon} K(s) \right], \tag{3.14a}$$

$$\check{\Phi}(s, z) = \overline{\Phi}(z|s_\mathrm{p}) \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\epsilon} K(s) \right], \tag{3.14b}$$

$$\check{T}(s, z) = \overline{T}(z|s_\mathrm{p}) \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\epsilon} K(s) \right] \tag{3.14c}$$

の形に仮定して求めることにする。この関数形に対しては、微分演算子 $\epsilon^n \partial^n/\partial s^n$ は単に

$$\epsilon^n \frac{\partial^n}{\partial s^n} = [\mathrm{i}k(s)]^n + O(\epsilon) \tag{3.15}$$

と置き換えればよい。ただし、

$$k(s) = \frac{\mathrm{d}K(s)}{\mathrm{d}s} \tag{3.16}$$

で、これを複素波数とよぶ。式 (3.15) の右辺の第 1 項が生き残るためには、$k(s) \neq 0$ である必要がある。これに対して、複素波数がゼロとなる極限 ($k(s) \to 0$) の場合は、別に考察しなければならない (§4.2 参照).

式 (3.14) を方程式系 (3.11) と (3.13) に代入して整理すると、

$$\left(D - \frac{\mathrm{i}\omega^*}{Pr}\right) D\overline{\Psi} + D\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial z} + \mathrm{i}m^* Ra^* \overline{T} = 0, \tag{3.17a}$$

$$\left(D - \frac{\mathrm{i}\omega^*}{Pr}\right) D\overline{\Phi} - \frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial z} - Ra^* z\overline{T} = 0, \tag{3.17b}$$

$$(D - \mathrm{i}\omega^*)\overline{T} - FzD\overline{\Phi} + \mathrm{i}m^* F\overline{\Psi} = 0 \tag{3.17c}$$

と境界条件

$$\mathrm{i}m^*\overline{\Psi} - Dz\overline{\Phi} = 0 \qquad (s^2 + z^2 = 1 \text{ で}) \tag{3.18}$$

が得られる。ここに、

$$D = -k^2 - \frac{m^{*2}}{s^2} \tag{3.19}$$

である。方程式 (3.17) と斉次境界条件 (3.18) は、s、Ra^*、ω^*、m^* および Pr を与えて k^2 を決定するという固有値問題を構成する。

さて、k^2 がある点 $s = s_\mathrm{p}$ (この点は後で、撹乱の振幅の最大値に選ぶ) のまわりに、

$$k(s)^2 = a_0 + a_1(s - s_\mathrm{p}) + O((s - s_\mathrm{p})^2) \tag{3.20}$$

のように Taylor 級数に展開できると仮定する。ここに、$a_0(\neq 0)$ と a_1 は s_p、Ra^*、ω^*、m^* および Pr の複素関数である. パラメター ϵ が小さい極限では、撹乱の空間構造は主として式 (3.14) の位相関数 $K(s)$ によって決定される。点 $s = s_\mathrm{p}$ 近傍の $K(s)$ の関数形は、式 (3.20) を積分することによって得られる。式 (3.20) の最初の 2 項から、

$$k(s) = \pm[a_0 + a_1(s - s_\mathrm{p})]^{\frac{1}{2}} + O((s - s_\mathrm{p})^2) \tag{3.21}$$

が出てくる。これを積分すると、

$$K(s) = const. \pm \frac{2}{3a_1}[a_0 + a_1(s - s_{\rm p})]^{\frac{3}{2}} + O((s - s_{\rm p})^3) \tag{3.22}$$

となる。従って、撹乱 $\check{\Phi}$ は、

$$\check{\Phi} \propto \overline{\Phi}(z|s_{\rm p})\exp\left[\pm\frac{2}{3a_1\epsilon}[a_0 + a_1(s - s_{\rm p})]^{\frac{3}{2}}\right] \tag{3.23}$$

と表される。

いま $a_0 \neq 0$ であるから、関数 $K(s)$ を点 $s = s_{\rm p}$ のまわりで、Taylor 展開して、

$$\mathrm{i}K(s) = \mathrm{i}K(s_{\rm p}) + \mathrm{i}k(s_{\rm p})(s - s_{\rm p}) + \frac{\mathrm{i}}{2}k'(s_{\rm p})(s - s_{\rm p})^2 + O((s - s_{\rm p})^3) \tag{3.24}$$

を得る。ここに、

$$k(s_{\rm p}) = \pm {a_0}^{\frac{1}{2}}, \tag{3.25a}$$

$$k'(s_{\rm p}) = \frac{a_1}{2k(s_{\rm p})} \tag{3.25b}$$

である。絶対値 $|\check{\Phi}|$ が最大となる点では、式 (3.24) の $(s - s_{\rm p})$ の係数がゼロで、$(s - s_{\rm p})^2$ の係数が負、すなわち、

$$k_{\rm i}(s_{\rm p}) = 0 \tag{3.26}$$

かつ、

$$k'_{\rm i}(s_{\rm p}) > 0 \tag{3.27}$$

である。波数 $k(s_{\rm p})$ が実数であるので $a_0 > 0$ である。条件 (3.27) はいつでも満たすことができる。というのは、$a_{1\rm i} > 0$ か $a_{1\rm i} < 0$ に従って、$k_{\rm r}(s_{\rm p}) = \sqrt{a_0}$ か $k_{\rm r}(s_{\rm p}) = -\sqrt{a_0}$ かのいずれかをとればいいからである。もしも、$a_{1\rm i} = 0$ であれば、$|\check{\Phi}|$ は一般には $s_{\rm p}$ のまわりに局在せず、より高次の項を考慮しなければならない。以上により、

$$\check{\Phi}(s, z) \approx \overline{\Phi}(z|s_{\rm p}) \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\epsilon}\left\{K(s_{\rm p}) + k_{\rm r}(s_{\rm p})(s - s_{\rm p}) + \tfrac{1}{2}k'(s_{\rm p})(s - s_{\rm p})^2\right\}\right] \tag{3.28}$$

を得る。従って、撹乱は

$$\Phi \approx \overline{\Phi}(z|s_{\rm p}) \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\epsilon}\left\{K(s_{\rm p}) + \tfrac{1}{2}k'(s_{\rm p})(s - s_{\rm p})^2 + k_{\rm r}(s_{\rm p})(s - s_{\rm p}) + m^*\phi + \omega^* t\right\}\right] \tag{3.29}$$

と書ける。

これは、撹乱が点 $s = s_{\mathrm{p}}$ を中心として径方向に $O(\sqrt{\epsilon})$ の広がりをもち、位相が径方向から角度

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{k_{\mathrm{r}}(s_{\mathrm{p}})}{m^*}\right) \tag{3.30}$$

だけ傾いていることを示している。式 (3.23) からわかるように、$a_0 \to 0$ のとき、撹乱の構造は振幅最大の点 $s = s_{\mathrm{p}}$ でより鋭くとがる。

4. 一様熱源の場合の安定特性

4.1 臨界 Rayleigh 数

ここでは、内部熱源が球内に一様に分布している場合を考える。この場合は、$F \equiv 1$ である (式 (2.9) 参照).

方程式 (3.11) と (3.13) から $\check{\Psi}$ と $\check{T}$ を消去して、

$$\left[(\mathcal{D} - \mathrm{i}\omega^*)\frac{\partial^2}{\partial z^2} - Ra^*\mathcal{D}\left(\mathcal{D} - \frac{\mathrm{i}\omega^*}{Pr}\right)z^2 \right.$$
$$\left. + \left(\mathcal{D} - \frac{\mathrm{i}\omega^*}{Pr}\right)^2(\mathcal{D} - \mathrm{i}\omega^*)\mathcal{D} + m^{*2}Ra^*\left(\mathcal{D} - \frac{\mathrm{i}\omega^*}{Pr}\right) + \mathrm{i}m^*Ra^*\right]\check{\Phi} = 0 \tag{4.1}$$

および境界条件

$$\mathcal{D}\left(\mathcal{D} - \frac{\mathrm{i}\omega^*}{Pr}\right)z\,\check{\Phi} + \mathrm{i}m^*\frac{\partial\check{\Phi}}{\partial z} = 0 \qquad (s_{\mathrm{p}}^2 + z^2 = 1 \text{ で}) \tag{4.2}$$

を得る。これに対応して、方程式系 (3.17) と (3.18) は、

$$\left[(D - \mathrm{i}\omega^*)\frac{\partial^2}{\partial z^2} - Ra^*D\left(D - \frac{\mathrm{i}\omega^*}{Pr}\right)z^2 \right.$$
$$\left. + \left(D - \frac{\mathrm{i}\omega^*}{Pr}\right)^2(D - \mathrm{i}\omega^*)D + m^{*2}Ra^*\left(D - \frac{\mathrm{i}\omega^*}{Pr}\right) + \mathrm{i}m^*Ra^*\right]\overline{\Phi} = 0 \tag{4.3}$$

と境界条件

$$D\left(D - \frac{\mathrm{i}\omega^*}{Pr}\right)z\,\overline{\Phi} + \mathrm{i}m^*\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial z} = 0 \qquad (s_{\mathrm{p}}^2 + z^2 = 1 \text{ で}) \tag{4.4}$$

に帰着する。これは ω^*、m^*、s_{p} および k_{r} を与えて Ra^* を決定する固有値問題を構成する。ここで、点 $s = s_{\mathrm{p}}$ で $k_{\mathrm{i}} = 0$ となることを思いだそう (式 (3.26) 参照)。固有関数 $\overline{\Phi}$

は、合流型超幾何関数で表される。以下では、臨界 Rayleigh 数は、$k_r = 0$、すなわち、径方向撹乱（$\alpha = 0$）で達成されることを証明する。

さて、$m^* < 0$ に対する固有値問題 (4.3) と (4.4) の解は、$m^* > 0$ に対する解の複素共役になっているから、一般性を失うことなしに $m^* \geq 0$ と仮定することができる。新しい変数

$$\zeta = \frac{z}{\sqrt{1 - {s_\mathrm{p}}^2}} \tag{4.5}$$

を導入して、方程式系 (4.3) と (4.4) を書き換えると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + A\zeta^2 + B\right)\overline{\Phi} = 0 \tag{4.6}$$

および

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + C\right)\overline{\Phi} = 0 \qquad \text{on } \zeta = \pm 1 \tag{4.7}$$

となる。ここに、

$$A = \frac{b^2}{c^3}\frac{1 - \mathrm{i}a/Pr}{1 - \mathrm{i}a} m^{*5} Ra^*, \tag{4.8a}$$

$$B = -bc\left(1 - \frac{\mathrm{i}a}{Pr}\right)^2 + \left(\frac{1 - \mathrm{i}a/Pr}{c^2(1 - \mathrm{i}a)} - \frac{\mathrm{i}}{c^3(1 - \mathrm{i}a)}\right) b\, m^{*5} Ra^*, \tag{4.8b}$$

$$C = -\left(\frac{a}{Pr} + \mathrm{i}\right) b\zeta \tag{4.8c}$$

で、定数 a、b、c は

$$a = \frac{\omega^*}{D}, \qquad b = \frac{D^2(1 - {s_\mathrm{p}}^2)}{m^*}, \qquad c = -m^* D \tag{4.9a, b, c}$$

で与えられる。

固有値問題 (4.6) と (4.7) は、$m^{*5}Ra^*$、a、b、c および Pr の間の関数関係を与えることになる。すなわち、

$$Ra^* = \frac{1}{m^{*5}} f_1(b, c, Pr), \tag{4.10a}$$

$$a = f_2(b, c, Pr) \tag{4.10b}$$

と書ける。ここに、f_1 は正の関数である。式 (3.19) から、不等式

$$D \leq -\frac{m^{*2}}{{s_\mathrm{p}}^2} \tag{4.11}$$

が導かれる。ただし、等号は $k=0$ のときに成り立つ。式 (4.9b) と (4.9c) を式 (4.11) に代入すると、

$$m^{*3} \le \frac{c^2}{b+c} \tag{4.12}$$

となる。ここで、$b, c \ge 0$ に注意されたい (式 (4.9b, c) 参照)。従って、

$$m^{*3} = \frac{c^2}{b+c} \tag{4.13}$$

すなわち、$k=0$ のとき、Rayleigh 数は最小値

$$Ra_{\mathrm{c}}^* = \left(\frac{b+c}{c^2}\right)^{\frac{5}{3}} f_1(b, c, Pr) \tag{4.14}$$

をとる。これは、臨界 Rayleigh 数に対しては、$a_0 = 0$ であることを示している。この臨界値よりわずかに大きな Rayleigh に対しては、一般に、

$$a_0 = O(Ra^* - Ra_{\mathrm{c}}^*) \tag{4.15}$$

と書ける。

波数がゼロの撹乱に対する臨界 Rayleigh 数は、Roberts（文献 3）が反対称撹乱に対して、また Busse（文献 4）が対称撹乱に対して求めている。我々の解析は、彼らの結果が任意の波数の撹乱の中で、波数ゼロの撹乱が臨界 Rayleigh 数を与えるものであることを保証するものである。しかしながら、次章で議論するように、$k=0$ に対する撹乱は径方向に局在しないので、上記の臨界 Reyleigh 数は極限値と考えなければならない。

4.2 撹乱の空間構造

熱源が一様に分布している場合には、臨界撹乱は $k=0$ のときに実現するので、式 (3.15) の初項はゼロになり、§3.2 の解析は $k=0$ の近傍で破綻してしまう。この節では、臨界状態付近での撹乱の構造を考察する。

撹乱の径方向の変化の長さスケールは前もってわからないから、撹乱の形を式 (3.14) の代わりに、

$$\check{\Phi}(s, z) = \overline{\Phi}(z|s_{\mathrm{p}})\, f(s) \tag{4.16}$$

とおく。もし径方向の構造関数 $f(s)$ の変化のスケールが小さく、$\mathrm{d}f/\mathrm{d}s \gg 1$ であれば、$-k^2 = \epsilon^2 \partial^2/\partial s^2$ (関係式 (3.15) 参照) がやはり成り立つ。このとき、式 (4.1) から、点 $s = s_{\mathrm{p}}$ (式 (3.20) 参照) の近傍で、

$$\left(\epsilon^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} + a_0 + a_1(s - s_{\mathrm{p}})\right) f = 0 \tag{4.17}$$

が得られる。ここでは、a_0 が小さいとしているが (式 (4.15) 参照)、a_1 は一般に $O(1)$ の量と考える。微分方程式 (4.17) の第 1 項と第 3 項を等値することによって、関数 $f(s)$ の変化する長さスケールは $O(\epsilon^{\frac{2}{3}})$ であることがわかる。従って、今の解析の前提条件、$\mathrm{d}f/\mathrm{d}s = \epsilon^{-\frac{2}{3}} \gg 1$ ($\epsilon \ll 1$ に対して) は確かに満たされている。

微分方程式 (4.17) の独立な 2 つの基本解は、

$$f(s) = \begin{cases} (s-s_\mathrm{p})^{\frac{1}{2}} H^{(1)}_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{2}{3\epsilon a_1}(a_0 + a_1(s-s_\mathrm{p}))^{\frac{3}{2}}\right), & (4.18a) \\ (s-s_\mathrm{p})^{\frac{1}{2}} H^{(2)}_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{2}{3\epsilon a_1}(a_0 + a_1(s-s_\mathrm{p}))^{\frac{3}{2}}\right) & (4.18b) \end{cases}$$

である。ここに、$H^{(1)}_{\frac{1}{3}}$ と $H^{(2)}_{\frac{1}{3}}$ はそれぞれ第 1 種および第 2 種の Hankel 関数である。

構造関数 $f(s)$ は $|(a_1\epsilon)^{-1}(a_0 + a_1(s-s_\mathrm{p}))^{\frac{3}{2}}| \gg 1$ の極限で

$$f(s) = \begin{cases} \left(\dfrac{3\epsilon}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} a_1^{\frac{1}{4}}(a_0 + a_1(s-s_\mathrm{p}))^{-\frac{3}{4}}(s-s_\mathrm{p})^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-\dfrac{5}{12}\pi\mathrm{i} + \dfrac{2\mathrm{i}}{3\epsilon a_1}(a_0 + a_1(s-s_\mathrm{p}))^{\frac{3}{2}}\right] \\ \qquad\qquad (-\pi < \arg\, a_1^{-1}(a_0 + a_1(s-s_\mathrm{p}))^{\frac{3}{2}} < 2\pi \text{ の場合}), \\ \qquad\qquad (4.19a) \\ \left(\dfrac{3\epsilon}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} a_1^{\frac{1}{4}}(a_0 + a_1(s-s_\mathrm{p}))^{-\frac{3}{4}}(s-s_\mathrm{p})^{-\frac{1}{4}} \exp\left[\dfrac{5}{12}\pi\mathrm{i} - \dfrac{2\mathrm{i}}{3\epsilon a_1}(a_0 + a_1(s-s_\mathrm{p}))^{\frac{3}{2}}\right] \\ \qquad\qquad (-2\pi < \arg\, a_1^{-1}(a_0 + a_1(s-s_\mathrm{p}))^{\frac{3}{2}} < \pi \text{ の場合}) \\ \qquad\qquad (4.19b) \end{cases}$$

のような漸近形をもつ（文献 7 ）。

漸近式 (4.19) の指数関数の中の第 2 項は、点 $s = s_\mathrm{p}$ で、値が $\pm 2\mathrm{i}a_0^{\frac{3}{2}}/3\epsilon a_1$ で、その 2 階微分が $\pm \mathrm{i}a_1/2\epsilon a_0^{\frac{1}{2}}$ である。従って、局在撹乱は、$a_{1\mathrm{i}} > 0$ のときは式 (4.19a) で、$a_{1\mathrm{i}} < 0$ のときは式 (4.19b) で表される。撹乱の幅の広がりは $O(\epsilon^{\frac{2}{3}})$ である。もし $a_0 = O(\epsilon^{\delta})$、すなわち $Ra^* - Ra^*_\mathrm{c} = O(\epsilon^{\delta})$ であれば（式 (4.15) 参照）、解は $\delta < \frac{2}{3}$ のときは局在するが、$\delta > \frac{2}{3}$ のときは局在しない。これは、撹乱が径方向に局在するためには、Rayleigh 数は臨界値より少なくとも $O(\epsilon^{\frac{2}{3}})$ の程度に大きくなければならないことを意味する。

漸近式 (4.19a) と (4.19b) の指数関数は、それぞれ $0 < \arg(a_1\epsilon)^{-1}(a_0 + a_1(s-s_\mathrm{p}))^{\frac{3}{2}} < \pi$ と $-\pi < \arg(a_1\epsilon)^{-1}(a_0 + a_1(s-s_\mathrm{p}))^{\frac{3}{2}} < 0$ の範囲で、$|(a_1\epsilon)^{-1}(a_0 + a_1(s-s_\mathrm{p}))^{\frac{3}{2}}| \to \infty$ の極限でゼロに収束することに注意しよう。この条件は撹乱が局在する範囲を与えている。を局在範囲は a_0 の減少、あるいは Rayleigh 数の臨界値への接近とともに狭くなる。

ついでながら、$Pr = 1$ の場合の対称撹乱に対する各種パラメターの臨界値は $Ra^* = 3.382$、$m^* = 0.3004$、$\omega^* = -0.4362$、$s_{\mathrm{p}} = 0.5004$、$k_{\mathrm{r}} = 0$ および $a_1 = 1.59 - 0.81\mathrm{i}$ である（文献４と比較されたい）。

5. 結語

本稿では、速く回転する球内での熱対流の線形安定特性を漸近解析を用いて調べた。臨界撹乱は、その構造が径方向から傾いている場合にのみ径方向に局在するものであることがわかった。一般には、このような傾斜撹乱が臨界 Rayleigh 数を与える。しかし、熱源が一様に分布している特別な場合には、径方向に向いた撹乱が臨界 Rayleigh を与えることが証明された。径方向撹乱は局在しないから、この臨界 Rayleigh 数は極限値として理解される。

このように安定性の問題において臨界状態が存在しないのは、今の系に特有なものであるように思われる。これは、今の場合、臨界状態が局在解の存在条件の境界として決定されるということの結果である。通常の安定性の問題では、撹乱の固有関数は臨界状態をまたいで常に存在し、臨界 Rayleigh 数は撹乱の成長率の符合の変わる条件から決定される。

本解析では、撹乱方程式の全ての項を残すという条件のもとで、撹乱の変動の長さスケールを決定した（付録参照）。これに対して、部分的に項を釣り合わすことによって別の長さスケールを導くことも可能である。方程式系のいくつかの項を無視してしまうと、意味のある解が存在しないということがよく起こる。しかし、部分的な項の釣合から本稿で得られた臨界値より低い Rayleigh 数を与える解が存在しないとは言い切れない。そのような可能性を吟味することはここではしないが、ただ、矢野（文献６）が考察した簡単化した系についての考察を以下に述べる。

彼は、球面の赤道面に対する傾きが小さいと仮定して基礎方程式系を導いた。この系は、式 (3.17*b*) で第１項と第３項を省略し、また式 (3.17*c*) で第２項を省略すれば、方程式系 (3.17) と (3.18) に等価になる。しかし残念ながら、このような系に対応するスケール指数 a–f は存在しないのである。これは、矢野の系が、我々のオーダー評価とは相容れないものであることを意味する。§4.1 で証明したように、この系では撹乱の構造は径方向に向いていなくてはならないが、彼の系では臨界撹乱が径方向からずれているのはこのためである。ついでながら、Zhang （文献８）による直接数値シミュレーションで観察された傾斜撹乱は、臨界値より大きな Rayleigh 数で励起される撹乱である（式 (3.30) 参照）。

ここでは、ひとつの球の中に閉じ込められた流体の熱対流のみを取り扱ったが、本解析

は、速く回転する任意の軸対称面（例えば、2つの同心球面）で囲まれた流体の流れに直ちに適用できる。そして、一般に、傾斜攪乱が臨界値を与えることが期待される。

引用文献

1) F.H. Busse: Ann. Rev. Fluid Mech. **10** (1978) 435.

2) P.H. Roberts: Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **44** (1988) 3.

3) P.H. Roberts: Phil. Trans. A **263** (1968) 93.

4) F.H. Busse: J. Fluid Mech. **44** (1970) 441.

5) A.M. Soward: Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **9** (1977) 19.

6) J. Yano: J. Fluid Mech. **243** (1992) 103.

7) M. Abramowitz & I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions (Dover 1972).

8) K. Zhang: J. Fluid Mech. **236** (1992) 535.

付録

§3.1 で導入したスケール指数 a–f の値を、連立微分方程式 (2.16) に現れる 9 つの項全てが同じオーダーになるように決定したい。方程式 (2.16) の各項の大きさは変数のオーダーを表す式 (3.2)-(3.4) を代入することによって評価される。その結果、9 つの項の ϵ の冪は、

$$\begin{bmatrix} -2\max(a,b)-2\max(a,b,c) & -3+d-c-2\max(a,b) & -f-b+e \\ -2\max(a,b)-4\max(a,b,c)+d & -3-c-2\max(a,b) & -f+e-\max(a+b,2\max(a,b)) \\ -2\max(a,b,c)+e & d-\max(a+b,2\max(a,b)) & -b \end{bmatrix} \tag{$A\cdot 1$}$$

となる。ただし、この行列の各要素は方程式 (2.16) の対応する位置にある項の大きさを表している。

定数 a、b、c の値のいろいろな組合せに対して、$(A\cdot 1)$ は次のようになる。

[1] $c \geq b \geq a$、$a+c \geq 2b$ の場合、

$$\begin{bmatrix} -2c-2b & -3+d-c-2b & -f-b+e \\ d-4c-2b & -3-c-2b & -f+e-a-c \\ e-2c & d-a-c & -b \end{bmatrix}, \tag{$A\cdot 2$}$$

[2] $c \geq b \geq a$、$a+c \leq 2b$ の場合、

$$\begin{bmatrix} -2c-2b & -3+d-c-2b & -f-b+\epsilon \\ d-4c-2b & -3-c-2b & -f+e-2b \\ e-2c & d-2b & -b \end{bmatrix}, \tag{$A\cdot 3$}$$

[3] $c \geq a \geq b$ の場合、

$$\begin{bmatrix} -2c-2a & -3+d-c-2a & -f-b+e \\ d-4c-2a & -3-c-2a & -f+e-a-c \\ e-2c & d-a-c & -b \end{bmatrix}, \qquad (A\cdot 4)$$

[4] $b \geq a, c$ の場合、

$$\begin{bmatrix} -4b & -3+d-c-2b & -f-b+e \\ d-6b & -3-c-2b & -f+e-2b \\ e-2b & d-2b & -b \end{bmatrix}, \qquad (A\cdot 5)$$

[5] $a \geq b, c$ の場合、

$$\begin{bmatrix} -4a & -3+d-c-2a & -f-b+e \\ d-6a & -3-c-2a & -f+e-2a \\ e-2a & d-2a & -b \end{bmatrix}. \qquad (A\cdot 6)$$

これらの行列の各行の3つの要素を等しいとおくと、スケール指数は [1] $a = b \leq \frac{3}{2}$, $c = d = \frac{3}{2}$, $e = 3 - a$, $f = 6$, [2] $a \leq \frac{3}{2}$, $b = c = d = e = \frac{3}{2}$, $f = 6$, [3] $a \leq \frac{3}{2}$, $b = c = d = e = \frac{3}{2}$, $f = 6$, [4] $c = 3b - 3$, $b = d = e$, $f = 4b$, $(1, a \leq b \leq \frac{3}{2})$, [5] $a = b = d = e$, $c = 3a - 3$, $f = 4a$, $(1 \leq a \leq \frac{3}{2})$ となる。

最小の Rayleigh 数を与える臨界状態は、f が最小のとき実現される。これは、[4] で $b = 1$ の場合と [5] で $a = 1$ の場合に起こる。これらの2つの場合をまとめて、$a \leq 1$、$b = d = e = 1$、$c = 0$、$f = 4$ と書ける。

ところで、$a < 1$ の場合は、ラプラシアンは、ϵ の最低次では、$\nabla^2 = \nabla_\perp^2 = (1/s^2)(\partial^2/\partial\phi^2)$ で置き換えられ、撹乱の時間変動は方程式系 (3.17) と (3.18) で $k = 0$ として記述される。従って、臨界状態はスケール指数を式 (3.5) のようにおいて解析すればよい。